# حد چپ و راست

در تعریف $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ، $x$ هائي را درنظر میگیریم که در یك بازه شامل $a$ و نه $a$ خود باشند ، یعني مقادیر $x$ نزدیك به $a$ را چه بزرگتر و یا کوچکتر $a$ از باشند .

حال فرض کنید تابعي چون $f$ داریم که $f(x)=\sqrt{x-4}$ چون براي $x<4$ مقدار $f(x)$ وجود ندارد . بنابراین $f$ در هیچ بازه باز شامل 4 معین نیست . لذا $\lim\limits_{x \to 4}\sqrt{x-4}$ بي معني است . با وجود این ، اگر $x$ را به مقادیر بزرگتر از 4 محدود کنیم ، مي توانیم مقدار $\sqrt{x-4}$ را به اندازه دلخواه به 0 نزدیك کنیم ، با شرط اینکه $x$ ها را بزرگتر از 4 ولي به اندازه کافي نزدیك به 4 بگیریم . درچنین حالتي $x$ ها را از سمت راست به 4 میل میدهیم و حد یکطرفه از راست یا حد راست را طبق تعریف زیر داریم :

تعریف 4 – 1 : فرض کنید تابع $f$ براي هر عدد در بازه بازي چون $(a,c)$ تعریف شده باشد. حد $f(x)$ وقتي $x$ از سمت راست به $a$ میل میکند برابربا $L$ است و نوشته مي شود :

$$\lim_{x \to a^+} f(x)=L$$

هرگاه براي هر $\varepsilon>0$ هرقدر کوچك ، یك $\delta>0$ وجود داشته باشد که

$$\left|f(x)-L\right|<\varepsilon \ , \ 0<x-a<\delta \qquad (1)$$

توجه کنید که در عبارت (1) چون $x>a$ در دو طرف $x-a$ علامت قدر مطلق وجود ندارد.

از تعریف نتیجه میشود که

$$\lim_{x \to 4^+} \sqrt{x-4} = 0$$

وقتي حد يك تابع را درنظر ميگيريم ، اگر متغير مستقل $x$ را به مقادير كوچكتر از عدي مانند $a$ محدود كنيم ، ميگوئيم $x$ از سمت چپ به $a$ ميل ميكند و در اينصورت حد را حد يكطرفه از چپ ميناميم.

تعريف 4 – 2 : فرض كنيد تابع $f$ براي هر عدد در بازه بازي چون $(a,d)$ تعريف شده باشد. حد $f(x)$ وقتي $x$ از سمت چپ به $a$ ميل ميكند برابربا $L$ است و نوشته مي شود :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

هرگاه براي هر $\varepsilon > 0$ هرقدر كوچك ، يك $\delta > 0$ وجود داشته باشد كه

$$\left| f(x) - L \right| < \varepsilon \ , \ 0 < x - a < \delta$$

جهت تميز دادن $f(x)$ از حد هاي يكطرفه مي توانيم

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

را حد دوطرفه يا حد بدون جهت بناميم .

اگر در قضاياي حدي بجاي $x \to a$ ، $x \to a^+$ يا $x \to a^-$ گذاشته شود در درستي آنها تغيري حاصل نميشود .

مثال : فرض كنيد تابع $f$ با ضابطه زير تعريف شده باشد .

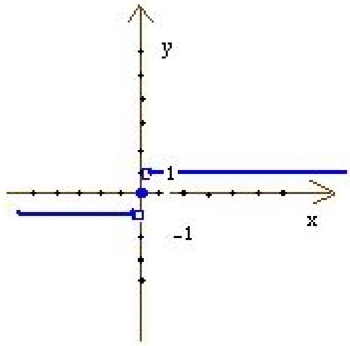
$$f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

(الف ) نمودار را رسم كنيد .

(ب) حد چپ را درصورت وجود بيابيد .

(ج) حد راست را درصورت وجود بيابيد .

حل : نمودار تابع در شكل زير رسم شده است :




$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +1$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

در مثال فوق چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند ، حد دوطرفه

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

وجود ندارد این قضیه را بهصورت زیر بیان مي کنیم :

قضیه 11 : $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود دارد و برابر با $L$ است اگر و تنها اگر $\lim_{x \to a^+} f(x)$ و $\lim_{x \to a^-} f(x)$ هر دو موجود و برابر $L$ باشند .

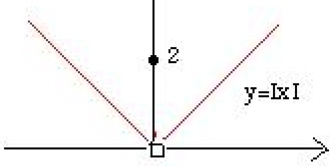
مثال 10 : فرض کنید تابع $g$ با ضابه زیر تعریف شده باشد :

$$g(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

(الف) نمودار $g$ را رسم کنید.

(ب) $\lim_{x \to 0} g(x)$ را درصورت وجود بیابید .

حل : نمودار $g$ در شکل زیر رسم شده است :



$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = \lim x$$

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim x = 0$$

پس بنا به قضيه فوق $\lim_{x \to 0} g(x)$ وجود دارد و برابر 0 است . توجه کنيد که $g(0) = 2$ ، و هيچ اثري روي $\lim_{x \to 0} g(x)$ ندارد.

مثال 11 :

$$\lim f(x) = \left|\frac{x}{x}\right|$$

1. $\lim_{x \to 0^+} f(x)$
2. $\lim_{x \to 0^-} f(x)$
3. $\lim_{x \to 0} f(x)$

حل : با استفاده از تعريف قدر مطلق داريم :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 & x > 0 \\ \dfrac{-x}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

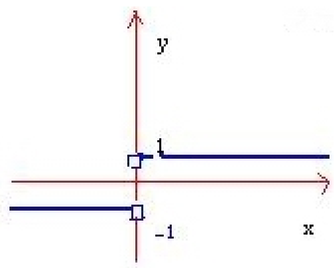
(لف )

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim 1 = 1$$

(ب)

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim -1 = -1$$

(ج) چون حد هاي چپ و راست برابر نيستند $\lim_{x \to 0} f(x)$ پس وجود ندارد.




مثال 12 :حد تابع مقابل را محاسبه کنید $f(x)=[x]$

(الف) $\lim_{x\to 2^+}[x]$

(ب) $\lim_{x\to 2^-}[x]$

(ج) $\lim_{x\to 2}[x]$

حل :

( الف ) اگر $2<x<3$ باشد میدانیم $[x]=2$ بنابراین $\lim_{x\to 2^+}[x]=\lim 2=2$

(ب) اگر $1<x<2$ باشد میدانیم $[x]=1$ بنابراین $\lim_{x\to 2^-}[x]=\lim 2=1$

ج چون حد چپ و راست با هم برابر نیستند بنابراین $\lim_{x\to 2} f(x)=[x]$ وجود ندارد

مثال 13 : اگر $f(x)=[x]+[x-4]$

( الف ) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$

( ب ) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$

( ج ) $\lim_{x\to 3} f(x)$

حل : اگر $2<x<3$ باشد داریم $[x]=2$ و $2<x<3\Rightarrow 1<4-x<2$ و اگر $[4-x]=1$ بنابراین $f(x)=3+1=4$ و اگر $3\le x<4$ باشد . $[x]=3$ ، $[4-x]=0$ و $f(x)=3+0$

(الف )

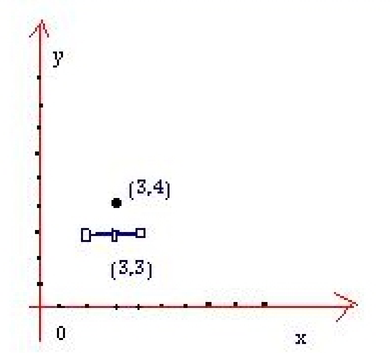
$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim 3=3$$

(ب)

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim 3 = 3$$

(ج) چون حد چپ و راست با هم برابر هستند

$$\lim_{x \to 3} f(x) = \lim 3 = 3$$



تمرین : درتمرینهاي زیر نمودار تابع را رسم کنید حد هاي مشخص شده را درصورت وجود بیابید . اگر حد وجود ندارد دلیل آنرا ذکر کنید :

1 -

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & x<1 \\ 4 & x=1 \\ x^2+2 & x>1 \end{cases}$$

$a.\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

$b.\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

$c.\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

$-2$

$$f(x)=|x-5|$$

$a.\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)$

$b.\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)$

$c.\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

$-3$

$$f(x)=\begin{cases} 0 & x=-1 \\ |x-1| & x<-1 \\ |1-x| & x>-1 \end{cases}$$

$a.\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

$b.\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

$c.\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

$-4$

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2-9} & x<-3\\ \sqrt{9-x^2} & -3<x<3\\ \sqrt{x^2-9} & x>3\end{cases}$$

$a.\lim_{x\to -3^+} f(x)$

$b.\lim_{x\to -3^-} f(x)$

$c.\lim_{x\to -3} f(x)$

$-5$

$f(x)=[x-3]$

$x\to 4$

$-6$

$f(x)=[x]+[4-x]$

$x\to 3$

7 – تابع $f(x)=\begin{cases}kx-3 & x\le -1\\ x^2+k & -1\le x\end{cases}$ مفروض است مطلوب است مقدار $k$ به طوري

که $\lim_{x\to -1} f(x)$ وجود داشته باشد .