قضاياي مربوط به حد توابع

براي محاسبه حد توابع بطور سرراست ، احتياج به چند قضيه داريم اثبات اين قضايا متكي به تعريف 1 – 4 است . اين قضايا و قضاياي ديگر مربوط به حد توابع كه در قسمت بعدي بيان مي شوند . قضاياي حدي نام دارند و هنگام ارائه با همين عنوان مشخص مي شوند .

قضيه حدي 1 : اگر m و b عدد ثابتي باشند

$$\lim_{x \to a}(mx+b) = ma+b$$

قضيه حدي 2 : اگر c عدد ثابتي باشد آنگاه براي هر عدد دلخواه a نتيجه ميشود :

$$\lim_{x \to a} c = c$$

قضيه حدي 3 :

$$\lim_{x \to a} x = a$$

قضيه حدي 4 :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = M \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to a}\left[f(x) \pm g(x)\right] = L \pm M$$

قضيه حدي 5 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=M\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\left[f(x)\times g(x)\right]=L\times M$$

قضيه حدي 6 : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ براي هر عدد صحيح n داريم :

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\right]^n = L^n$$

قضيه حدي 7 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=M \quad , \quad M\neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L}{M}$$

قضيه حدي 8 : اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ براي هر عدد صحيح n داريم :

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

مثال 1 :

$$\lim_{x\to 4}\sqrt[3]{\frac{x}{-7x+1}} \Rightarrow \sqrt[3]{\frac{4}{-27}}=-\sqrt[3]{\frac{4}{3}}$$

مثال 2 :

$$\lim_{x\to 2}\sqrt{\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$$

$$\sqrt{\lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x+3}{x^2+5}}$$

$$\sqrt{\frac{\lim(x^3+2x+3)}{\lim(x^2+5)}}$$
$$x\to 2$$

$$\sqrt{\frac{\lim_{x\to 2}(x^3+2x+3)}{\lim_{x\to 2}(x^2+5)}}=\sqrt{\frac{2^3+2\times 2+3}{2^2+5}}=\sqrt{15/3}$$

مثال 3 : حد $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$ را بيابيد.

حل : با توجه به اينكه $x\to 3$ مخرج كسر صفر خواهد شد براي رفع اين مشكل صورت راتجزيه ميكنيم

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x^2+3x+9$$

اگر $x\neq 3$ اين كسر برار با x^2+3x+9 است (زيرا اگر $x\neq 3$ باشد صورت و مخرج را ميتوان بر $x-3$ تقسيم كرد

وقتي $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$ را محاسبه ميكنيم مقادير نزديك x به را 3 درنظر ميگيريم نه مساوي 3 را . پس تقسيم صورت و مخرج بر $x-3$ امكان پذير است و حل مساله بصورت زير خواهد بود :

$$\lim_{x\to 3}x^2+3x+9=3^2+3\times 3+9=27$$

مثال 4 : با توجه به تعريف حد تابع زير مقدار آن را بيابيد :

$$\lim_{x\to 4}f(x)=\begin{cases}x-3 & x\neq 4\\ 5 & x=4\end{cases}$$

حل :

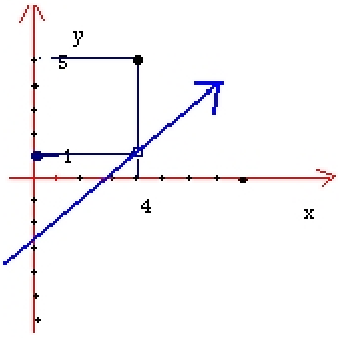
وقتي $\lim_{x\to 4}f(x)$ را محاسبه ميكنيم مقادير نزديك به 4 را درنظر ميگيريم و نه مقادير مساوي با 4 را پس داريم

$$\lim_{x\to 4}f(x)=\lim_{x\to 4}(x-3)=-1$$

در اين مثال $\lim_{x\to 4}f(x)=-1$ در صورتي كه $f(4)=5$ بنابر اين

$$\lim_{x\to 4}f(x)\neq f(4)$$

اين مثالي است از تابعي که در $x=4$ ناپيوسته است . تعبير هندسي اين نکته اين است که در نمودار تابع در نقطه $x=4$ يك شكستگي وجود دارد (مانند شكل زير).



نمودار تابع متشکل است از نقطه منفرد $(4,5)$ و خط مستقيم به معادله $y=x-3$ که نقطه $(4,1)$ از روي آن برداشته شده است .

قضيه حدي 9 : اگر a عددي بجز 0 باشد آنگاه داريم

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$$

قضيه حدي 10 :

$$\lim_{x \to a} \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a}$$

اگر n زوج باشد و a عدد دلخواه مثبتي باشد

اگر n فرد باشد و a هر عدد دلخواه مي تواند باشد .

تمرین :

در معادلات زیر مقدار حد را بیابید :

1. $\lim_{x \to 5} (3x - 7)$

2. $\lim_{z \to -2} (z^3 + 8)$

3. $\lim_{x \to 3} \frac{4x - 5}{5x - 1}$

4. $\lim_{t \to 2} \frac{t^2 - 5}{2t^3 + 6}$

5. $\lim_{z \to -5} \frac{z^2 - 25}{z + 5}$

6. $\lim_{t \to -2} \frac{2 - 3t - 2t^2}{16 + 6t - t^2}$

7. $\lim_{r \to 1} \sqrt{\frac{8r + 1}{r + 3}}$

8. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x+2} - \dfrac{\sqrt{2}}{x}$

10. $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt[3]{h+1} - 1/h$

11. $\lim\limits_{t \to 0} 2 - \dfrac{\sqrt{4-t}}{t}$