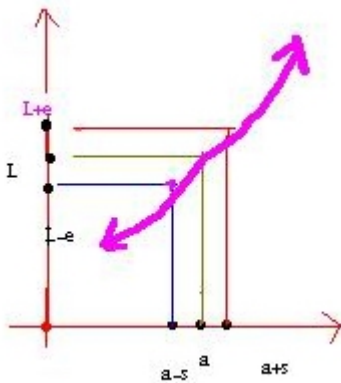


## حد

تعريف 4 - 1 : فرض کنید  $f(x)$  تابعی باشد که در تمام نقاط يك بازه باز مانند  $I$  که شامل عدد  $a$  ، بجز احتمالاً " در خود  $a$  ، تعريف بشود .  
حد  $f(x)$  وقتی  $x$  به سمت  $a$  میل میکند برابر  $L$  است و می نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

اگر به ازای هر  $\varepsilon > 0$  هر قدر کوچک ، عدد مثبتی چون  $\delta$  وجود داشته باشد که :  
 $|f(x) - l| < \varepsilon$  ,  $0 < |x - a| < \delta$



تعريف 4 - 2 : حاکی است که وقتی  $x$  به سمت عددی مانند  $a$  میل کند مقادیر  $f(x)$  به سمت حدی چون  $L$  میل میکند اگر با انتخاب  $x$  به اندازه کافی نزدیک به  $a$  ، با شرط  $x \neq a$  بتوان قدر مطلق اختلاف بین  $f(x)$  و  $L$  را به قدر دلخواه کوچک کرد .

توجه به این نکته مهم است که در تعریف فوق از مقدار تابع  $f(x)$  برای  $x = a$  چیزی گفته نشده است یعنی برای وجود

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

حتی لازم نیست که تابع برای  $x = a$  تعریف بشود .

یک تعبیر هندسی تعریف 4 - 1 برای تابعی چون  $f(x)$  در شکل فوق نمایش داده شده است .

تنها بخشی از نمودار تابع که نزدیک نقطه به طول  $x = a$  است در شکل نشان داده شده است چون  $f$  لزوماً در  $a$  تعریف نمی شود نقطه ای بطول  $L$  روی نمودار وجود ندارد . مشاهده کنید که وقتی  $x$  روی محور افقی بین  $a - \delta$  و  $a + \delta$  قرار داشته باشد ،  $f(x)$  روی محور قائم بین  $L - e_1$  و  $L + e_1$  واقع می شود . بعبارت دیگر ، با محدود کردن  $x$  روی محور افقی بین  $a + \delta_1$  و  $a - \delta_2$  ، میتوان  $f(x)$  را روی محور قائم بین  $L - e$  و  $L + e$  محدود کرد بنابراین :

$$0 < |f(x) - L| < \varepsilon , |x - a| < \delta$$

مثال 1 : فرض کنید تابع  $f(x)$  به معادله  $f(x) = 4x - 1$  تعریف شده باشد . اگر

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 11$$

مقدار  $\delta$  را برای  $e = 0.01$  پیدا کنید بطوری که :

$$|f(x) - 11| < 0.01 , 0 < |x - 3| < \delta$$

حل :

$$|f(x) - 11| = |(4x - 1) - 11| = |4x - 12| = 4|x - 3|$$

$$4|x - 3| < 0.01 , 0 < |x - 3| < \delta$$

$$|x - 3| < 0.0025 , 0 < |x - 3| < \delta$$

با فرض  $\delta = 0.0025$  داریم :

$$|(4x - 1) - 11| < 0.01 , 0 < |x - 3| < 0.0025$$

در این مثال بعنوان  $\delta$  مورد نظر ، می توانیم بجای 0.0025 هر عدد مثبت کوچکتر از 0.0025 را هم انتخاب کنیم یعنی اگر  $0 < \delta < 0.0025$  و عبارت

$$|(4x - 1) - 11| < 0.01 , 0 < |x - 3| < 0.0025$$

برقرار باشد ، آنگاه وقتی که  $0 < |x - 3| < \delta$  ،  $|(4x - 1) - 11| < 0.01$  ،

زیرا اگر  $x$  در نامساوی  $0 < |x-3| < \delta$  صدق کند ، آنگاه در نامساوی  $0 < |x-3| < 0.0025$  نیز صدق میکند .

مثال 2 : با استفاده از تعریف 1 - 4 ثابت کنید که

$$\lim_{x \rightarrow 11} (4x-1) = 11$$

حل : نخستین شرط تعریف این است که به ازای هر عدد متعلق به یک بازه باز که شامل 3 باشد ، بجز احتمالا " 3 ،  $4x-1$  معین باشد چون  $4x-1$  به ازای همه مقادیر  $x$  معین است ، هر بازه باز شامل 3 این شرط را برآورده میکند . حال باید نشان دهیم که به ازای هر  $\varepsilon > 0$  یک  $\delta > 0$  که وقتی

$$|(4x-1)-11| < \varepsilon , 0 < |x-3| < \delta$$

از مثال 1 می بینیم که

$$|(4x-1)-11| = |4x-12| = 4|x-3|$$

بنابراین می خواهیم وقتی که

$$4|x-3| < \varepsilon , 0 < |x-3| < \delta$$

یا وقتی که

$$|x-3| < \left(\frac{1}{4}\right)\varepsilon , |x-3| < \delta$$

لذا اگر فرض کنیم  $\delta = \varepsilon/4$  داریم

$$|x-3| < 4\delta , 0 < |x-3| < \delta\varepsilon$$

به عبارت دیگر ، وقتی که

$$4|x-3| < 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)\varepsilon , 0 < |x-3| < \delta$$

وقتی که

$$4|x-3| < \varepsilon , 0 < |x-3| < \delta$$

که از آن نتیجه میشود

$$|(4x-1)-11| < \varepsilon , 0 < |x-3| < \delta$$

با این شرط که  $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$  و این ثابت میکند که

$$\lim_{x \rightarrow 11} (4x-1) = 11$$

مثال 3 : با استفاده از تعریف 1 - 4 ثابت کنید که

$$\lim x^2 = 4$$

$$x \rightarrow 2$$

حل : چون به ازاي هر مقدار از  $x$  ،  $x^2$  معين است ، هر بازه باز شامل 2 نخستين شرط تعريف 1 - 4 را برآورده ميکند .

بايد نشان دهيم که براي هر  $\varepsilon > 0$  يك  $\delta > 0$  وجود دارد که

$$|x-2| < \varepsilon , 0 < |x^2 - 4| < \delta \quad (6)$$

$$|(x-2)(x+2)| < \varepsilon , 0 < |x-2| < \delta$$

$$|x-2||x+2| < \varepsilon , 0 < |x-2| < \delta$$

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|} , 0 < |x-2| < \delta \quad (7)$$

چون ميخواهيم به ازاي تمام مقادير  $x$  در بازه  $I$  مورد نياز در تعريف 1 - 4 ، داشته

باشيم  $|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|}$  يك بازه باز خاص براي  $I$  اختيار ميکنيم و با کمک آن يك کران

پائين براي  $\frac{\varepsilon}{|x+2|}$  به دست ميآوريم . اگر  $I \in (1,3)$  باشد که مرکزش 2 و شعاعش 1

است ، آنگاه به ازاي هر

$$x \in I , |x+2| = x+2$$

بعلاوه به ازاي هر

$$x \in I , \frac{\varepsilon}{x+2} > \frac{\varepsilon}{5}$$

پس به ازاي مقادير  $x$  در  $I$  ،  $\frac{\varepsilon}{5}$  کران پائيني براي  $\frac{\varepsilon}{|x+2|}$  است ، در نتيجه از اين

کران پائين شعاع بازه  $I$  ، کوچکترين را بعنوان  $\delta$  اختيار ميکنيم يعني  $\delta$  را کوچکترين

$$\frac{\varepsilon}{5} \text{ و } 1 \text{ در نظر ميگيريم و مي نويسيم } \delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{5}, 1\right) \text{ پس}$$

$$|x-2| < \frac{\varepsilon}{5} < \frac{\varepsilon}{|x-2|} , 0 < |x-2| < \delta \quad (8)$$

به شرطي که  $\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{5}, 1\right)$  ، از عبارت (8) نتيجه مي شود که به ازاي اين مقدار از  $\delta$

، عبارت (7) و عبارت معادل آن (6) برقرارند . براي اينکه اهميت  $\delta$  را نشان دهيم چند

مقدار ممکن برای  $\varepsilon$  را در نظر میگیریم . اگر  $\frac{\varepsilon}{5} > 1$  یعنی اگر  $0 < \frac{\varepsilon}{5} < 1$  یعنی

$$. \delta = \frac{\varepsilon}{5} \text{ می نویسیم } 0 < \varepsilon < 5$$

آنگاه وقتی که  $0 < |x-2| < \delta$  ,  $0 < |x-2| < \frac{\varepsilon}{5}$  ,  $|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|}$  پس به ازای هر

$0 < \varepsilon < 5$  وقتی که  $0 < |x-2| < 1$  ,  $0 < |x-2| < \varepsilon$  و  $|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|}$  عبارت  $0 < |x-2| < \delta$

ایجاب میکند که  $x \in I$  و  $x \neq 2$  .

عبارت  $|x-2| < \frac{\varepsilon}{|x+2|}$  معادل است با عبارت  $x^2 - 4 < \varepsilon$  بنابراین تعریف 1 - 4

$$. \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4 \text{ برقرار است}$$

قضیه زیر نشان می دهد که یک تابع نمی تواند در یک زمان به سمت دو حد مختلف میل کند . این قضیه را قضیه یکنائی می نامیم زیرا تضمین میکند که اگر یک تابع حد داشته باشد ، آن حد یکتا است .

قضیه 1 - 4 :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2 \end{array} \right\} \Rightarrow L_1 = L_2$$

مثال 4 : با استفاده از تعریف حد ثابت کنید :

صورت مساله غلط می باشد .

تمرین :

در تمرینهای زیر  $f(x), a, l, f(x) = L$  داده شده اند و برای  $\varepsilon$  مفروض ز مانی که

$x \rightarrow a$  عددی مانند  $\delta$  وجود دارد به شرطی که  $0 < |x - a| < \delta$  ,  $|f(x) - L| < \varepsilon$

1.  $\lim_{x \rightarrow a} (2x + 4) = 10$  ,  $\varepsilon = 0.01$

2.  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = 9$  ,  $\varepsilon = 0.005$

3.  $\lim_{x \rightarrow a} (x^2 - 2x + 1) = 1$  ,  $\varepsilon = 0.001$

4.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = 1$  ,  $\varepsilon = 0.002$

5.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 4}{2x + 4} = -4$

در تمرینات زیر با استفاده از تعریف حد به ازای هر  $\varepsilon > 0$  یک  $\delta > 0$  پیدا کنید که

داشته باشیم  $0 < |x - a| < \delta$  ,  $|f(x) - L| < \varepsilon$

6.  $\lim_{x \rightarrow 4} 2x + 1 = 6$

7.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^2 - 1}{x + 1} \right) = -2$

8.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3 + 2x - x^2) = 0$

9.  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x+5} = 3$

10.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x}-1}{x+1} = \frac{1}{2}$