جبر توابع

اگر f تابعي باشد كه قلمروش متغير باشد ، نماد $f(x)$ مقدار خاصي از y را كه متناظر با مقدار x است نمايش ميدهد .

نمونه 1 : داريم $f(x)=\{(x,y);\sqrt{5-x}\}$

بنابراين $f(x)=\sqrt{5-x}$ چون براي $x=3$ داريم $\sqrt{5-x}=2$ پس ميتوانيم بنويسيم $f(3)=2$ به طريق مشابه $f(0)=\sqrt{5}$ و غيره ... .

وقتي يك تابع را تعريف ميكنيم ، بايد قلمرو آنرا بطور صريح و يا ضمني مشخص كنيم مثلا اگر تابع f بصورت زير تعريف شود

$$f(x)=3x^2-5x+2$$

معلوم است كه x هر عدد حقيقي مي تواند باشد ولي اگر تابع $f(x)$ را بصورت زير تعريف كرده باشيم $1<x<10$ ، آنگاه قلمرو تابع $f(x)$ بازه $[1,10]$ است به طريق مشابه اگر تابع $g(x)$ به وسيله معادله زير تعريف شود :

$$g(x)=\frac{5x-2}{(x+4)}$$

معلوم است كه $x\neq -4$ اين خارج قسمت براي $x=-4$ معين نيست بنابراين قلمرو تابع $g(x)$ مجموعه تمام اعداد حقيقي بجز -4 است . اگر $h(x)=\sqrt{9-x^2}$ معلوم است كه x بايد در بازه بسته $[-3,3]$ باشد زيرا $\sqrt{9-x^2}$ براي $|x|\geq 3$ معين نيست (يعني ، يك عدد حقيقي نيست)

بنابراين دامنه و برد تابع h به قرار زير است :

$$D_f=[-3,3]$$
$$R_f=[0,3]$$

مثال – 1 : فرض کنید $f(x)=x^2+3x-4$ مطلوب است :

$1.\ f(0)$
$2.\ f(2)$
$3.\ f(2h)$
$4.\ f(2x)$
$5.\ f(h)$
$6.\ f(x+h)$

حل:

$1.\ f(0)=0^2+3\times 0-4=-4$
$2.\ f(2)=2^2+3\times 2-4=6$
$3.\ f(2h)=(2h)^2+3\times 2h-4=4h^2+6h-4$
$4.\ f(2x)=(2x)^2+3\times 2x-4=4x^2+6x-4$
$5.\ f(h)=h^2+3h-4$
$6.\ f(x+h)=(x+h)^2+3(x+h)-4=x^2+h^2+2xh+3x+3h-4$

مثال – 2 : فرض کنید $g(x)=\sqrt{3x-1}$ مطلوب است $\frac{[g(x+h)-g(h)]}{h}$ بطوريکه $h\neq 0$.

حل :

$$\frac{[g(x+h)-g(h)]}{h}$$
$$=\frac{\left[\sqrt{3(x+h)-1}-\sqrt{3x-1}\right]}{h}$$
$$=\frac{\left[\left(\sqrt{3x+3h-1}-\sqrt{3x-1}\right)\left(\sqrt{3x+3h-1}+\sqrt{3x-1}\right)\right]}{h\left(\sqrt{3x+3h-1}+\sqrt{3x-1}\right)}$$
$$=\frac{[(3x+3h-1)-3x+1]}{h\left(\sqrt{3x+3h-1}+\sqrt{3x-1}\right)}$$
$$=\frac{3}{\left(\sqrt{3x+3h-1}+\sqrt{3x-1}\right)}$$

در دومين مرحله از اين راه حل ، صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب کرديم تا کسر را گويا کنيم که با اين عمل ، عامل مشترك h در صورت و مخرج پديد آمد . اکنون چند عامل روي توابع تعريف ميکنيم . در اين تعريفها ، به وسيله جمع ، تفريق ، ضرب و تقسيم توابع جديدي از توابع مفروض پديد مي آيند که به همين علت آنها را مجموع ، حاصلضرب ، خارج قسمت و تفاضل توابع مي ناميم .

تعريف 1-2 : توابع و داده شده اند :

الف – مجموع آنها را با علامت $f+g$ نمايش مي دهيم و به صورت زير تعريف مي کنيم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

ب – تفاضل آنها را با علامت $f-g$ نمايش مي دهيم و به صورت زير تعريف مي کنيم:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

ج – حاصلضرب آنها را با علامت $f.g$ نمايش مي دهيم و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$(f.g)(x) = f(x).g(x)$$

الف – خارج قسمت آنها را با علامت f/g نمايش مي دهيم و به صورت زير تعريف مي كنيم:

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x)$$

در هريك از موارد بالا قلمرو تابع حاصل ، متشكل از آن مقادير است كه در قلمرو توابع f,g مشترك هستند بجز در حالت (د) كه بايد مقاديري را كه مخرج را برابر صفر قرار مي دهد حذف كرد $g(x) \neq 0$.

مثال – 3 : فرض كنيد $f(x) = \sqrt{x+1}, g(x) = \sqrt{x-4}$ مطلوب است :

(الف) . $(f+g)(x)$

(ب) . $(f-g)(x)$

(ج) . $(f.g)(x)$

(د) . $(f/g)(x)$

همچنين در هريك از موارد فوق ، قلمرو وبرد تابع حاصل را معين كنيد .

حل :

$$(f+g)(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-4}$$
$$(f-g)(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$$
$$(f.g)(x) = \sqrt{(x+1)(x-1)}$$
$$(f/g)(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-4}}$$

قلمرو f بازه $(-1,+\infty)$ و قلمرو g بازه $(4,+\infty)$ است بنابراين در قسمتهاي (الف) ، (ب) و (ج) قلمرو توابع حاصل برابر $[4,+\infty)$ است در قسمت (د) مخرج به ازاي $x = 4$ برابر صفر است بنابراين بايد 4 را از قلمرو حذف كرد ، پس قلمرو f/g بازه $(4,+\infty)$ است . براي نشان دادن حاصلضرب f در خودش يعني f,f علامت f^2 را بكار مي بريم مثلا اگر تابع بصورت $f(x) = 3x$ تعريف شده باشد ، انگاه تابع f^2 به صورت زير است :

$$f^2(x) = 3x \times 3x = 9x^2$$

علاوه بر اعمالي كه بيان شد عمل ديگري بنام تركيب دو تابع مفروض نيز وجود دارد .

تعريف 2 – 2 : اگر توابع f,g داده شده باشند تابع مركب و با نماد fog و با ضابطه زير تعريف مي شود $(fog)(x) = f(g(x))$ و قلمرو fog عبارت است از مجموع تمام x هاي واقع در قلمرو g ، بشرطي كه $g(x)$ در قلمرو f باشد .

مثال 4 : فرض كنيد $g(x) = 2x-3$ ، $f(x) = \sqrt{x}$ تابع $fog(x)$ را بيابيد وقلمرو آنرا بدست آوريد

$$fog(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = \sqrt{2x-3}$$

قلمرو g بازه $(-\infty,+\infty)$ و قلمرو f بازه $[0,+\infty)$ است بنابراین قلمرو متشکل از مجموعه اي از اعداد حقيقي است که به ازاي آنها $2x-3 \geq 0$ پس قلمرو $[\frac{3}{2},+\infty)$ است .

مثال – 5 : فرض کنيد توابع f, g با ضابطه $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=x^2-1$ تعريف شده باشند مطلوب است توابع مرکب زير

(الف) . $fof(x)$

(ب) . $gog(x)$

(ج) . $fog(x)$

(د) . $gof(x)$

در هرمورد قلمرو تابع مرکب را نيز بدست اوريد :

حل قلمرو f بازه $[0,+\infty)$ و قلمرو g بازه $(-\infty,+\infty)$ است .

(الف) . $fof(x)= f(f(x))=\sqrt{\sqrt{x}}=x^{\frac{1}{4}}$

پس قلمرو fof بازه $[0,+\infty)$ است .

(ب) . $gog(x)=g(g(x))=g(x^2-1)=(x^2-1)^2=x^4-2x^2+1-1=x^4-2x^2$

پس قلمرو gog بازه $(-\infty,+\infty)$ است .

(ج) . $fog(x)= f(g(x))= f(x^2-1)=\sqrt{x^2-1}$

پس قلمرو fog عبارت است از $(-\infty,1]\cup[1,+\infty)$ و يا مجموع تمام اعداد حقيقي بجز بازه $(-1,1)$.

(ت) . $gof(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2-1=x-1$

پس قلمرو gof بازه $[0,+\infty)$ است . توجه کنيد با وجود آنکه $x-1$ براي تمام مقادير x معين است ولي قلمرو gof بنا به تعريف عبارت است از مجموعه همه x هاي از قلمرو f که به ازاي انها $f(x)$ در قلمرو g است .

تعريف 3 – 2 :

(الف) . تابعي چون f را تابعي زوج گويند هر گاه به ازاي هر x در قلمرو f داشته باشيم

$$f(-x)= f(x)$$

(ب) . تابعي چون f را تابعي فرد گويند هر گاه به ازاي هر x در قلمرو f داشته باشيم

$$f(-x)=-f(x)$$

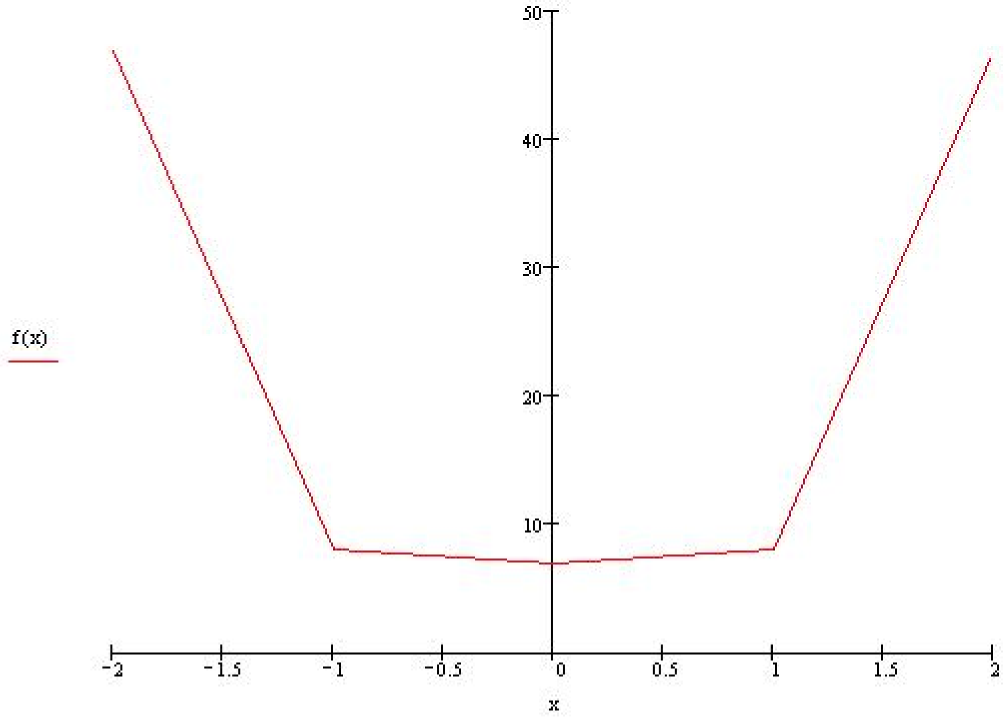
در هر دو مورد واضح است که براي هر x در قلمرو f ، $-x$ نيز بايد در قلمرو f باشد .

نمونه 2 :

(الف) :.

$$f(x)=3x^4-2x^2+7$$

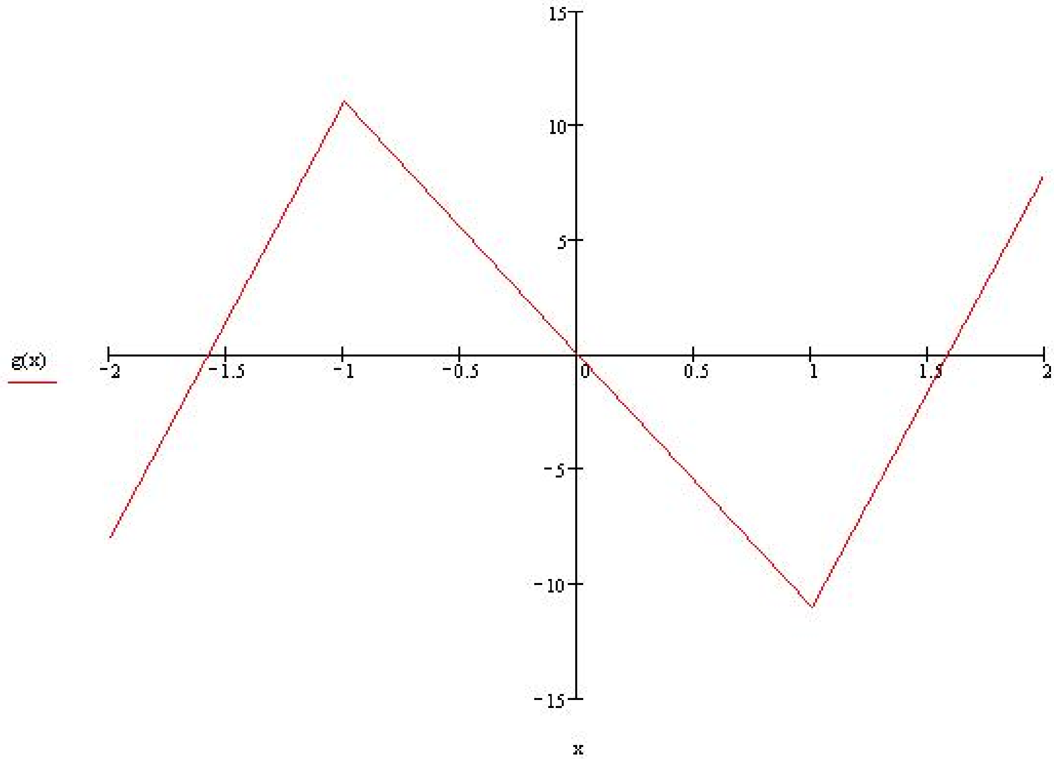
$$f(-x)=3(-x)^4-2(-x)^2+7$$



بنابراين f تابعي زوج است .

(ب) .

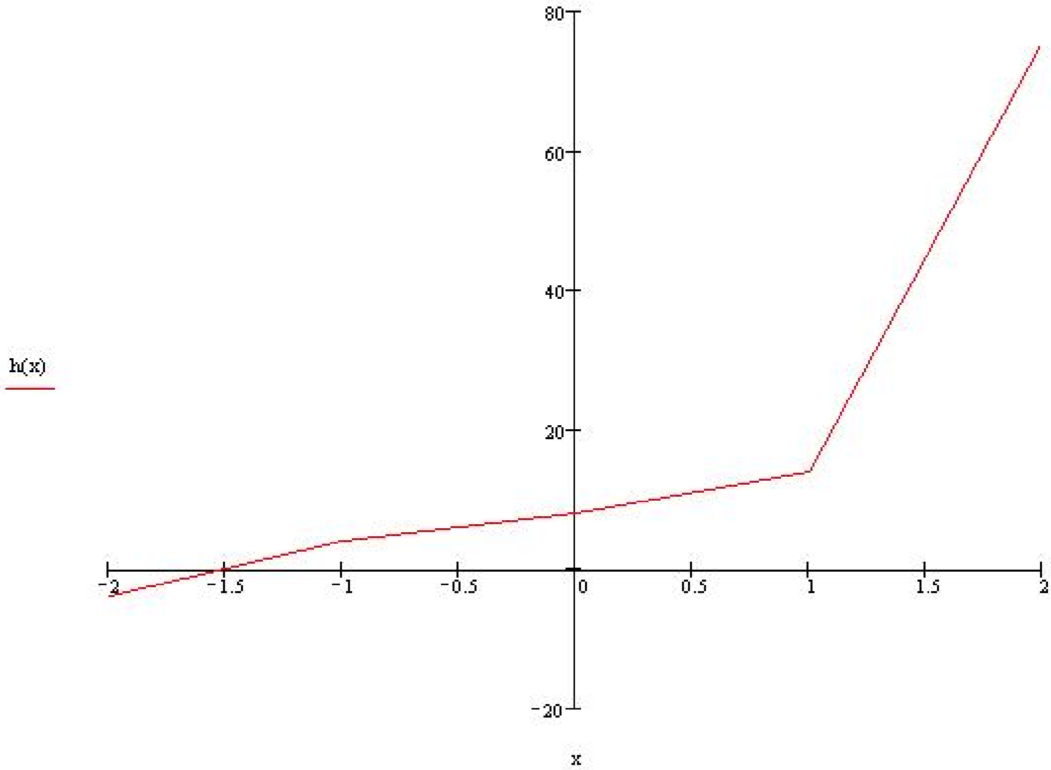
$$g(x) = 2x^5 + 5x^3 - 8x$$
$$g(-x) = 2(-x)^5 + 5(-x)^3 - 8(-x) = -g(x)$$



بنابراين g تابعي فرد است .

(ج) .

$$h(x) = 2x^4 + 5x^3 - x^2 + 8$$
$$h(-x) = 2(-x)^4 + 5(-x)^3 - (-x)^2 + 8$$
$$h(x) \neq h(-x)$$



بنابراين تابع h نه زوج است نه فرد .

از تعريف تابع زوج و قضيه فوق قسمت (الف) نتيجه مي شود كه نمودار تابع زوج ، نسبت به محور y متقارن است و از تعريف تابع فرد و قضيه فوق قسمت (ب) نتيجه مي شود كه نمودار تابع فرد نسبت به مبدا مختصات متقارن است .

اگر برد تابع فقط شامل يك عدد باشد ، انرا تابع ثابت مي ناميم . بنابراين اگر $f(x) = c$ و c يك عدد حقيقي دلخواه باشد ، انگاه $f(x)$ يك تابع ثابت است و نمودار آن خطي است مستقيم به موازات محور x ها و به فاصله جهت دار c از محور x ها . اگر تابع f بصورت زير تعريف شود :

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

كه در آن a_0 يك عدد طبيعي و $a_0, a_1, \ldots, a_n, (a_0 \neq 0)$ اعداد حقيقي باشند ، آنگاه $f(x)$ را يك تابع چند جمله اي از درجه n مي ناميم . تابع f كه بصورت زير تعريف شده باشد

$$f(x) = 3x^5 + 7x - 1$$

يك تابع چند جمله اي از درجه 5 است .

اگر درجه يك تابع چند جمله اي 1 باشد ، انرا يك تابع خطي مي نامند ، اگر درجه آن 2 باشد ، آنرا يك تابع درجه دوم ، و اگر از درجه 3 باشد آنرا يك تابع درجه سوم مي نامند . تابع خطي خاصي با تعريف $f(x)=x$ تابع هماني نام دارد .

نمونه – 4 :

تابع f كه بصورت $f(x)=3x+4$ تعريف شده باشد ، يك تابع خطي است .

تابع g كه بصورت $g(x)=5x^2-8x+4$ تعريف شده باشد يك تابع درجه دوم است .

تابع h كه بصورت $h(x)=8x^3-x+4$ تعريف شده باشد يك تابع درجه سوم است .

اگر تابعي بصورت خارج قسمت دو چند جمله اي قابل بيان باشد ، تابع گويا ناميده مي شود . تابع جبري تابعي است كه بوسيله تعداد متنابهي از اعمال جبري روي تابع همان و تابع ثابت به دست مي آيد . اين اعمال جبري شامل جمع ، تفريق ، ضرب ، تقسيم ، به توان رساندن و ريشه گرفتن هستند .

مثالي ازتوابع جبري

$$f(x)=\frac{x^2-3x+1}{\sqrt{x+1}}$$

مثال – 6 : فرض كنيد $f(t)=\frac{(|3+t|-|t|-3)}{t}$ باشد تابع $f(t)$ را بدون علامت قدر مطلق بنويسيد

براي $t>0$ كداميك از موارد زير بدست ميايد :

الف : 0 ب : t ج : $-t$ د : هيچكدام

حل : الف درست است چون $t>0$ پس $|3+t|3+t$, $|t|=t$ بنابراين $f(t)=\frac{(3+t-t-3)}{t}=0$

مثال 7 : اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ دامنه تعريف f/g كدام است :

الف : $R-\{0\}$ ب: $R-\{1\}$ ج : $R-\{0,1\}$ د : هيچكدام

حل : ج درست است زيرا دامنه تابع $f(x)$ ، مجموعه تمام اعداد حقيقي بجز عدد يك و دامنه $g(x)$ مجموعه تمام اعداد حقيقي بجز عدد صفر مي باشد .

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\frac{x+1}{x-1}}{\frac{1}{x}}=\frac{x(x+1)}{x-1}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=R-\{0,1\}$$

براي تعيين دامنه fog با توجه به تعريف اولا بايد $x\subset D_{\frac{f}{g}}$ باشد يعني نبايد صفر باشد . ثانيا بايد $(1/x)\in D_{\frac{f}{g}}$ يعني $\frac{1}{x}\neq 1$ بعبارت ديگر $x\neq 1$ باشد بنابراين $D_{fog}=R-\{0,1\}$

مثال 8 : اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ دامنه تعریف تابع fog کدامیك از موارد زیر است :

الف : $(0,\frac{1}{2}]$ ب : $[0,\frac{1}{2}]$ ج : R د : هیچکدام

حل :

$$D_f=\{x\mid x-2\geq 0\}=[0,\infty)$$
$$D_g=\{x\mid x\neq 0\}=R-0$$
$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{x})=\sqrt{\frac{1}{x}-2}$$

چون دامنه تابع $g(x)$ مجموعه $\{x\mid x\neq 0\}$است پس دامنه fog مجموعه $\{x\mid x\neq 0, g(x)\geq 2\}$ یعني باید

$$\frac{1}{x}\geq 2\rightarrow\frac{1}{x-2}\geq 0\rightarrow\frac{1-2x}{x}\geq 0$$

	$-\infty$		0		1/2		$+\infty$
x		-	0	+		+	
1-2x		+		+	0	-	
(1-2x)/x		-		+		-	

لذا دامنه توابع fog عبارت است از $(0,\frac{1}{2}]$.

مثال 9 : اگر توابع $g(x), f(x)$ به صورت زیر تعریف شده باشد فرمول $fog(x)$ را پیدا کنید :

$$f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & 0\leq x\leq 1\\ 0 & 1<x\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}1 & x<0\\ \frac{x}{2} & 0\leq x\leq 1\\ 1 & 1<x\end{cases}$$

حل :

$$fog(x)=f(g(x)=f(1)=2 \qquad x<0$$
$$fog(x)=f(g(x))=f(\frac{x}{2})=2(\frac{x}{2})=x \qquad 0\leq x\leq 1$$
$$fog(x)=f(g(x))=f(1)=2 \qquad 1<x$$

بنابراین خواهیم داشت :

$$f(x)=\begin{cases}2 & x<0\\ x & 0\le x\le 1\\ 2 & 1<x\end{cases}$$

مثال 10 : براي توابع تعريف شده در مثال قبل ، فرمول $fog(x)$ و دامنه انرا تعيين كنيد .

حل :

(1)

$$gof(x)=\begin{cases}g(0) & x<0\\ g(2x) & 0\le x\le 1\\ g(0) & 1<x\end{cases}$$

(2)

$$g(0)=\frac{1}{2}\times 0=0$$

$$g(2x)=\begin{cases}1 & 2x<0\\ \frac{1}{2}(2x) & 0\le 2x\le 1\\ 1 & 1<2x\end{cases}$$

يا

(3)

$$g(2x)=\begin{cases}1 & x<0\\ x & 0\le x\le 1\\ 1 & 1<x\end{cases}$$

با جايگذاري (2) و (3) در (1) داريم

$$gof(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ 1 & \frac{1}{2}\le x\le 1\\ 1 & 1<x\end{cases}$$

$$D_{gof}=(-\infty,+\infty)$$

$$R_{gof}=[0,\frac{1}{2}]\cup\{1\}$$

مثال 11 :براي هركدام از توابع زير معين كنيد زوج است يا فرد و يا هيچكدام

الف . $f(x)=2x^4-3x^2+1$

ب . $f(x)=5x^3-7$

ج . $f(x)=|x|$

د . $f(x)=\dfrac{x^3-x}{x^2+1}$

ه . $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

حل :

الف)

$$f(-x)=2(-x)^2-3(-x)^2+1=2x^4-3x^2+1$$
$$f(-x)=f(x)$$

بنابراين f زوج است

ب)

$$f(-x)=5(-x)^3-7(-x)=-(5x^3-7x)$$
$$f(-x)=-f(x)$$

بنابراين فرد است

ج)

$$f(-x)=|-x|=|x|=x$$
$$f(-x)=f(x)$$

بنابراين زوج است

د) فرد است

$$f(-x)=\frac{(-x)^3-(-x)}{(-x)^2+1}=\frac{-x^3-x}{x^2-1}$$
$$f(-x)=-f(x)$$

ه) نه زوج است نه فرد

$$f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}$$

مثال 12 : تابعي را پيدا كيد كه هم زوج باشد هم فرد

حل فرض كنيد f تابع مورد نظر باشد ، چون f زوج است داريم

$f(-x)=f(x)$ (1)

از طرفي فرد است ، پس

$f(-x)=-f(x)$ (2)

با جايگذاري (2) در (1) داريم

$$f(x)=-f(x)\Rightarrow 2f(x)=0,\ f(x)=0$$

مثال 13 : اگر f و g دو تابع فرد باشند ثابت كنيد $f\times g$ و $\dfrac{f}{g}$ توابعي زوج هستند :

$$(f.g)(x) = f(-x).g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

بنابراين $f \times g$ زوج است و بهمين ترتيب

$$(\frac{f}{g})(-x) = \frac{f(-x)}{g(-x)} = \frac{-f(x)}{-g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} = (\frac{f}{g})(x)$$

مثال 14 – در هريك از موارد زير ، درباره زوج يا فرد بودن تابع fog بحث كنيد :

(الف) توابع f و g هردو زوج باشند .

(ب) توابع f و g هردو فرد باشند .

(ج) تابع f زوج و تابع g فرد باشد .

(د) تابع f فرد و تابع g زوج باشد .

حل :

(الف)

$$(fog)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (fog)(x)$$

بنابراين fog زوج است

ب)

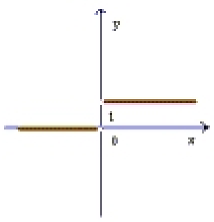
$$(fog)(-x) = f(g(-x)) = -f(g(x)) = -(fog)(x)$$

بنابراين fog فرد است .

حل قسمتهاي ج و د مشابه است

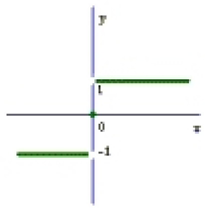
تعريف 4 - 2 : تابع پله اي واحد بصورت زير تعريف مي شود

$$U(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



دامنه اين تابع مجموعه اعداد حقيقي و برد آن مجموعه $(0,1)$ است .

تابع علامت كه بصورت sgn نمايش داده مي شود داراي تعريف زير است



$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & , \ x<0\\ 0 & , \ x=0\\ 1 & , \ x>0\end{cases}$$

دامنه اين تابع مجموعه اعداد حقيقي وبرد آن $\{-1,0,1\}$ است .

مثال 15 : اگر $f(x)=x^2+2x+2$ باشد ، تابعي براي g پيدا كنيم بطوري كه داشته باشيم

$$(fox)(x)=x^2-4x+5$$

حل :

$$(fog)(x)=[(g(x))]^2+2[g(x)]+2$$

بنابراين

$$[g(x)]^2+2[g(x)]+2=x^2-4x+5$$
$$[g(x)]^2+2[g(x)]+1=x^2-4x+4$$
$$[g(x)+1]^2=(x-2)$$
$$g[x]+1=x-2\Rightarrow g(x)=x-3$$
$$g(x)+1=-(x-2)\Rightarrow g(x)=1-x$$

مثال 16 : ثابت كنيد كه اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ توابعي خطي باشند تابع $(fog)(x)$ يك تابع خطي است

حل : مي دانيم كه اگر تابعي چند جمله اي درجه يك باشد ، انرا تابعي خطي مي گويند پس فرض كنيد

$$f(x)=ax+b$$
$$g(x)=cx+d$$

حال نشان مي دهيم fog يك تابع چند جمله اي درجه يك است

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(cx+d)=a(cx+d)+b=acx+ad+b=AX+b$$

تمرین :

1 – اگر $f(x)=2x-1$ مطلوب است

الف) $f(3)$

ب) $f(-2)$

ج) $f(0)$

د) $f(a+1)$

ه) $f(x+1)$

و) $f(2x)$

ز) $\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$

$h \neq 0$

فرض کنید تابع $f(x)$ بصورت زیر تعریف شده باشد :

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$$

الف) $f(1)$

ب) $f(-x)$

ج) $f(x+1)$

د) $f(x^2)$

ه) $f(-x^2)$

3 - اگر $f(t)=\frac{|3+t|-|t|-3}{t}$ فرمول $f(t)$ را بدون علامت قدر مطلق بنویسید بشرطي که

الف) $t>0$

ب) $-3 \leq t < 0$

ج) $t<0$

4 – در تمرین زیر براي توابع f و g توابع زیر را تعریف کنید و قلمرو انها را نیز بیابید :

$$(f+g)(x),(f-g)(x),(f.g)(x),(f/g)(x),(g/f)(x),(fog)(x),(gof)(x)$$

1. $f(x)=x-5$, $g(x)=x^2-1$
2. $f(x)=x^2-1$, $g(x)=\sqrt{x}$

3. $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=\frac{x+1}{x-1}$

4. $f(x)=|x-3|$, $g(x)=|x|$

5 – در تمرينات زير تعيين كنيد كداميك از توابع زير زوج يا فرد مي باشد

1. $f(x)=x^2-3x+1$

2. $f(s)=s^3+2s-2$

3. $f(y)=\frac{y^3-y}{y^2-1}$

4. $f(x)=|x|$

5. $f(x)=\begin{cases} 1 & x\geq 0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$

6. $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

7. $f(x)=\sqrt[3]{x}$