فصل اول

تابع

Y را به عنوان تابعی از x درنظر می گیریم هرگاه قاعده ای وجود داشته باشد که بر طبق آن به ازای هر مقدار x مقدار یکتائی به Y نسبت داده شود مثالهای آشنائی از اینگونه روابط عبارتند از:

(۱) $y = 2x^2 + 5$

(۲) $y = \sqrt{x-9}$

تعریف رسمی تابع مفهوم آنرا دقیق می سازد .

تعریف ۱ – ۱ : تابع مجموعه ای از زوجهای مرتب اعداد به صورت (X,Y) است که در بین انها هیچ دو زوج مرتب متمایزی که دارای عضوهای اول یکسان باشند یافت نشود . مجموع تمام مقادیر ممکن X قلمرو تابع و مجموعه تمام مقادیر ممکنY را برد تابع می نامند .

در تعریف ۱ – ۱ این محدودیت که هیچ دو زوج مرتب متمایزی نمی توانند مولفه های اول یکسانی داشته باشند ما را مطمئن می سازد که به ازای هر مقدار خاص X مقدار y یکتاست .

معادله (۱) معرف یک تابع است این تابع را f بنامید این معادله قاعده ای بدست میدهد که طبق آن اگر x داده شود مقدار یکتائی برایy بدست می آید بدین ترتیب که x را در خود و سپس در عدد ۲ ضرب می کنیم و ۵ را به ان اضافه می نمائیم تابع عبارت است از مجموعه زوجهای مرتب (X,Y) به طوري که x و y در رابطه (۱) صدق می کنند یعنی :

$$f = \{(x, y) \perp y = 2x^2 + 5\}$$

اعداد x و y را متغیر می نامیم . چون برای تابع f به x مقادیری نسبت می دهیم و مقدار y بستگی به انتخاب x دارد x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می نامیم. قلمرو تابع عبارت است از مجموعه تمام مقادیر ممکن متغیر مستقل و برد تابع مجموعه تمام اعداد حقیقی است که می توان آن را با نماد بازه به صورت $(-\infty,+\infty)$ نمایش داد کوچکترین مقداری که این تابع می تواند قبول کند ۵ است (وقتی x=0) پس برد مجموعه تمام اعداد ناکمتر از ۵ است و لذا $[5,+\infty)$.

نمونه ۱ : فرض کنید G تابعی است متشکل از تمام زوجهای مرتب (X,Y) که بوسیله معادله (۲) تعریف مي شوند يعني :

$$f = \{(x,y) \perp y = \sqrt{x^2 - 9}\}$$

چون صرفا با اعداد حقیقی سروکار داریم فقط به ازای مقادیر $-3 \le x \le 3$ یا (و به عبارت دیگر $|x| \le 3$)

تابعی از x است زیرا به ازای هر x ی که در هر یک از این نامساویها صدق کند مقدار یکتائی برای y به دست می آید . ولی اگر در بازه (3,3-) باشد . ریشه دوم یک عدد منفی به دست می آید و بنابراین هیچ عدد حقیقی y وجود ندارد . از اینرو x را باید محدود کنیم و لذا

$$f = \{(x,y) \perp y = \sqrt{x^2 - 9}, |x| \ge 3\}$$

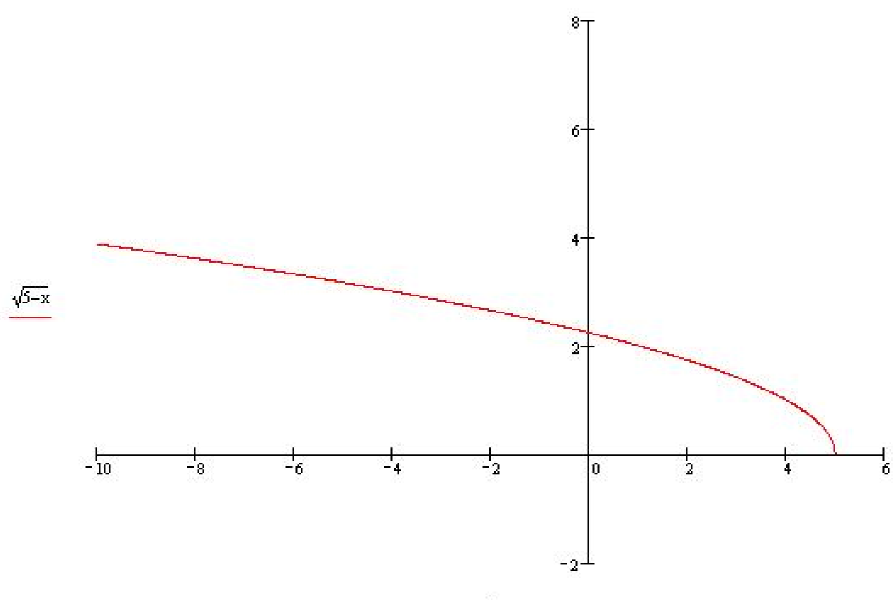
قلمرو g برابر است با $(-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$ و برد آن $[0,+\infty)$ است باید تاکید شود که برای آنکه تابع وجود داشته باشد باید به ازای هر مقدار متغیر مستقل در قلمرو تابع دقیقا یک مقدار برای متغیر وابسته بدست می آید .

تعریف ۱ – ۲ : اگر f یک تابع باشد نمودار f عبارت است از مجموع تمام نقاط (x,y) واقع در R به طوری که (x,y) زوج مرتبی از f باشد .

نمونه ۲ : فرض کنید

$$f(x) = \{(x,y) \perp y = \sqrt{5 - x}\}$$

نمودار f در شکل زیر رسم شده است قلمرو f مجموعه تمام اعداد حقیقی نابیشتر از ۵ یعنی بازه $(-\infty,5]$ است و برد آن مجموعه تمام اعداد حقیقی نامنفی یعنی $[0,+\infty)$ است .

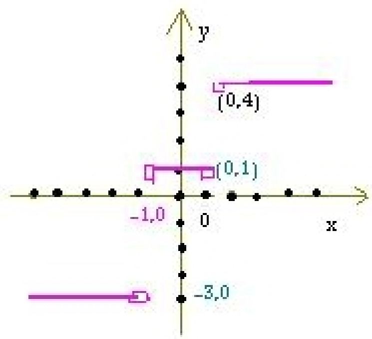


در نمونه بعدی تابع به وسیله بیش از یک معادله تعریف شده است . چنین تعریفی مجاز است به شرط آنکه به ازای هر مقدار x در قلمرو مقدار یکتائی برای y در برد وجود داشته باشد .

نمونه ۳ : فرض کنید g تابع متشکل از تمام زوجهای مرتب (X,Y) باشد که

$$y=\begin{cases}-3 & x<-1\\ 1 & -1<x<2\\ 4 & 2<x\end{cases}$$

قلمرو $(-\infty,+\infty)$ است در حالی که برد آن فقط از سه عدد 4,1,-3 تشکیل می شود . نمودار تابع در شکل زیر نشان داده شده است .

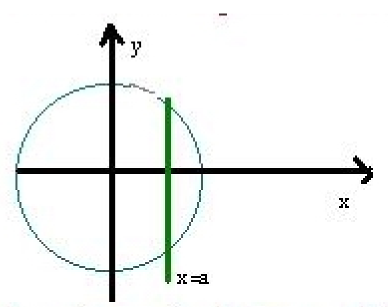


مشاهده می کنید که در شکل یک شکستگی در x=-1 و شکستگی دیگری در x=2 وجود دارد . می گوئیم g در 1- و ۲ ناپیوسته است. توابع پیوسته و ناپیوسته را در قسمت دیگر بررسی خواهیم کرد .

نمونه ۴ - مجموعه زیر را درنظر بگیرید :

$$y=\{(x,y)\perp x^2+y^2=25\}$$

نمودار این مجموعه در شکل ذیل نشان داده شده است .



این مجموعه از زوجهای مرتب تابع نیست زیرا برای هر x در بازه (5,5-) دو زوج مرتب با مولفه اول x وجود دارند . مثلا " زوجهای (3,4) و(3,4-) هر دو در مجموعه فوق قرار دارند . بعلاوه توجه کنید که نمودار این مجموعه دایره ای به مرکز مبدا و به شعاع 5 است و هر خط قائم با معادله x = 5 (با شرط 5>a>5−) این نمودار را در دو نقطه قطع می کند .

مثال - ۱ : فرض کنید $h=\{(x,y)\perp y=|x|\}$ قلمرو و برد h کدامیک از موارد زیر است :

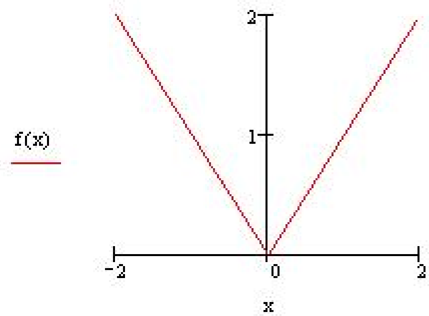
الف – قلمرو $(-\infty,0)$ برد $(0,+\infty)$

ب – قلمرو $(0,+\infty)$ برد $(-\infty,0)$

ج - قلمرو $(-\infty,+\infty)$ برد $(0,+\infty)$

د – هیچکدام

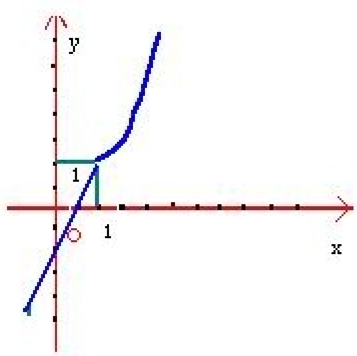
حل : قلمرو h بازه $(-\infty,+\infty)$ و برد آن $(0,+\infty)$ آن آست نمودار در شکل زیر رسم شده است .



مثال - ۲ : فرض کنید F تابعی باشد متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (X,Y) بطوری که

$$y=\begin{cases}3x-2 & x<1\\ x^2 & x\geq 1\end{cases}$$

قلمرو و برد F رابیابید



قلمرو F بازه $(-\infty,+\infty)$ و برد آن $(-\infty,+\infty)$ است .

مثال - ۳ : فرض کنید G تابعی باشد متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (X,Y) به طوری که

$$y=\frac{(x^2-9)}{x-3}$$

قلمرو و برد G کدام یک از موارد زیر است

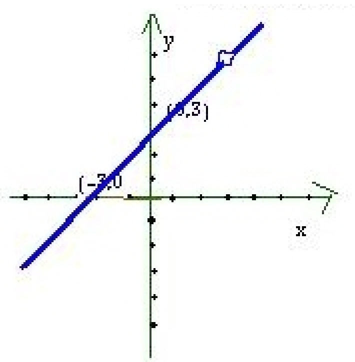
الف: R

ب :R-{3}

ج: R-{-3}

د : هیچکدام .

حل : شکل زیر نمودار G را نشان می دهد. چون به ازای هر x مقداری بجز x = 3 مقداری برای y به دست می آید . پس قلمرو عبارت است از از تمام اعداد حقیقی بجز عدد ۳ وقتی x = 3 صورت و مخرج هردو برابر صفر هستند و $\frac{0}{0}$ معین نیست .



اگر صورت را تجزیه کنیم داریم

$$y = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)}$$

با شرط y = x+3 به شرطی که x!=3 به عبارت دیگر تابع G متشکل از تمام زوجهای مرتب (X,Y) است که x!=3 و y=x+3 برد G عبارت است از تمام اعداد حقیقی بجز ۶ نمودار تابع عبارت است از تمام نقاط واقع بر خط y=x+3 بجز (3,6) .

مثال - ۴ : فرض کنید H تابعي متشكل از تمام زوجهاي مرتب (x, y) به طوري كه

$$y = \begin{cases} x+3 & x \neq 3 \\ 2 & x = 3 \end{cases}$$

قلمرو و برد h كداميك از موارد زير است :

الف) R و R

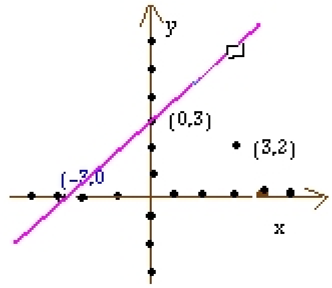
ب) $R-\{0\}$ و R

ج) R و $R-\{6\}$

د) هيچكدام

حل : شكل زير نمودار را نشان مي دهد. نمودار تشكيل مي شود از نقطه $(3,2)$ و تمام نقاط روي $(3,6)$.

تابع H براي تمام مقادير x معين است و بنابراين قلمرو بازه $(-\infty,+\infty)$ است . برد H عبارت است تمام اعداد حقيقي بجز عدد ۶



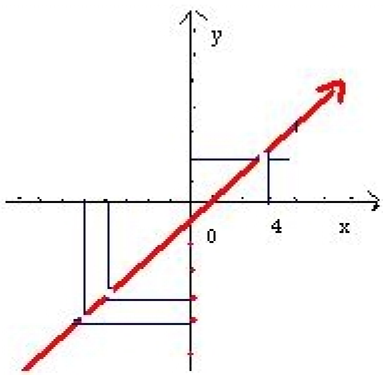
مثال - ۵ : فرض کنید y تابعي باشد متشکل از تمام زوجهاي مرتب (x,y) به طوري که

$$y=\frac{(x^2+3x-4)(x-9)}{(x^2+x-12)(x+3)}$$

برد H را بیابید و نمودار آنرا رسم کنید .

حل : نمودار این تابع در شکل زیر نشان داده شده است . اگر صورت و مخرج را تجزیه کنیم داریم

$$\mathrm{Y}=\frac{(\mathrm{x}+4)(\mathrm{x}-1)(\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}+3)}{(\mathrm{x}+4)(\mathrm{x}-3)(\mathrm{x}+3)}=x-1$$



مخرج کسر هنگامی که x مقادیر ۴- ,۳- و ۳ را دارا باشد برابر صفر است بنابراین این تابع برای این سه مقدار تعریف نمی شود . برای مقادیر ۳ ، ۳- ، 4- =! x می توان صورت و مخرج را بر عوامل مشترک تقسیم کرده و رابطه زیر را بدست اورد اگر ۳ ، ۳- و 4- =! x و y = x-1 بنابراین قلمرو y عبارت است از تمام اعداد حقیقی

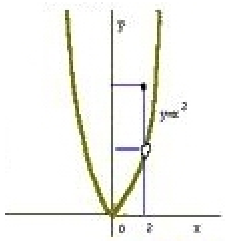
بجز اعداد 4,-3,3– . برد y عبارت است از مجموع تمام اعداد حقیقی بجز مقادیر حاصل ازقراردادن 4- , 3-, 3 به جای x در معادله y=x-1 یعنی تمام اعداد حقیقی بجز اعداد 5,-4,2– . نمودار y عبارت است از خط مستقیم y= x-1 بجز نقاط (5-,4-),(4-,3-),(3,2) .

مثال – ۶ : فرض کنید f تابعی باشد متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (X,Y) به طوری که

$$y=\begin{cases} x^2 & x\neq 2 \\ 7 & x=2 \end{cases}$$

قلمرو و برد F رابیابید و نمودار آن را رسم کنید .

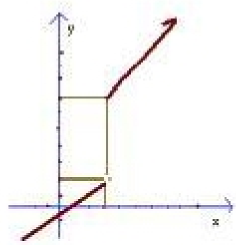
حل نمودار F در شکل زیر رسم شده است این نمودار ازنقطه (2,7) و تمام نقاط سهمی بجز نقطه (2,4) تشکیل شده است . تابع برای تمام مقادیرx معین است پس قلمرو آن $(-\infty,+\infty)$ است برد F متشکل است از تمام اعداد حقیقی نامنفی .



مثال - ۷ : فرض کنید h تابعی باشد متشکل از مجموعه تمام زوجهای مرتب (X,Y) بطوری که

$$h=\begin{cases} x-1 & x<3 \\ 2x & x\geq 3 \end{cases}$$

قلمرو و برد h را بیابید و نمودار آن را رسم کنید.



حل : نمودار h در شکل زیر نشان داده شده است . قلمرو $(-\infty,+\infty)$ است . مقادیر y یا کمتر از ۲ و یا ناکمتر از ۷ هستند . بنابراین برد عبارت است از $(-\infty,2)\cup[7,+\infty)$ و یا متشکل از تمام اعداد حقيقي است که در بازه $[2,7)$ نباشند .

مثال - ۸ : فرض کنید $g=\{(x,y)\mid y=\sqrt{x(x-2)}\}$ قلمرو و برد g را بیابید و نمودار انرا رسم کنید .

حل : چون $\sqrt{x(x-2)}$ هنگامي که $(x-2)<0$ يك عدد حقيقي نيست قلمرو g متشكل از مقاديري از x است که به ازاي انها $x(x-2)\geq 0$ اين نامساوي در هريك از دو حالت زير برقرار است :

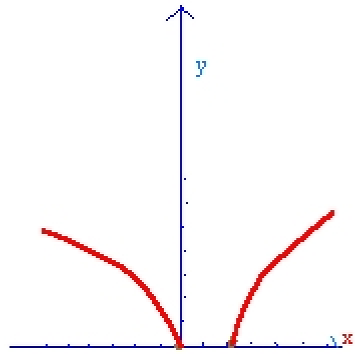
حالت ۱ : $x\leq 0$ و $(x-2)<0$ ، يعني $x\leq 0$ و $x\leq 2$ هر دو نامساوي فوق به ازاي $x\geq 2$ يهني در بازه $[2,+\infty)$ برقرارند .

حالت ۲ : $x\leq 0$ و $x\leq 2$ هر دو نامساوي فوق به ازاي $x\leq 0$ يهني در بازه $x\leq 0$ برقرارند .

جوابهاي هر دو حالت را با هم تركيب مي كنيم تا قلمرو و برد g بدست آيد كه عبارت است از:

$$D_f=(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$$

$$R_f=[0,+\infty)$$



در نمونه بعدي علامت $[x]$ را به كار ميبريم كه بنا به تعريف عبارت است از بزرگترين عدد صحيح ناكمتر از

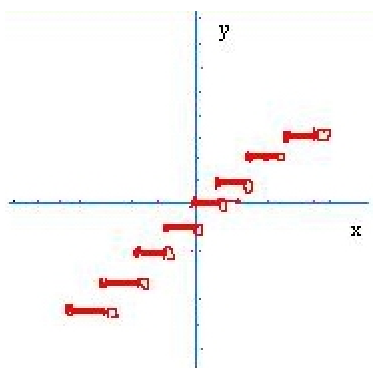
x يعني وقتي n يك عدد صحيح باشد داريم $[x] = n ,n<x< n+1$

اين تابع بزرگترين عدد صحيح می ناميم از تعريف نتيجه می شود كه

$N<x<n+1$ $[1.3] = 1$, $[-4.2] = 5$, $[9.8] = 0$

نمونه ۵ : فرض كنيد تابع F بزرگترين عدد صحيح باشد ، يعنی $F =\{(X,Y)|y=[x]\}$

نمودار در شكل زير رسم شده است برای رسم آن از مقادير زير استفاده شده است .



$-5 \le x < -4 \quad [x] = -5$

$-4 \le x < -3 \quad [x] = -4$

$-3 \le x < -2 \quad [x] = -3$

$-2 \le x < -1 \quad [x] = -2$

$-1 \le x < 0 \quad [x] = -1$

$0 \le x < 1 \quad [x] = 0$

$1 \le x < 2 \quad [x] = 1$

$2 \le x < 3 \quad [x] = 2$

$3 \le x < 4 \quad [x] = 3$

$4 \le x < 5 \quad [x] = 5$

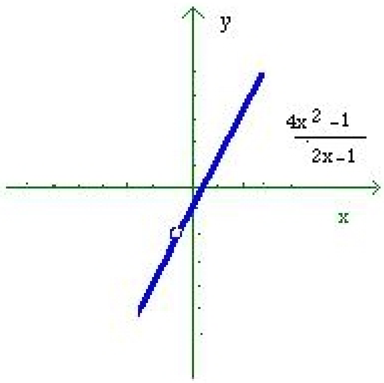
قلمروF مجموعه تمام اعداد حقيقی و برد آن مجموعه تمام اعداد صحيح است .

مثال – ۹ : اگر $f = \left\{ (x,y) \perp \frac{4x^2 - 1}{2x - 1} \right.$ دامنه تعريف و برد F را بيابيد .

حل : (1) $y = \frac{(2x+1)(2x-1)}{(2x+1)}$

دامنه تابع F مجموعه $\{x \in R | 2x+1 \neq 0\} = (x \in r \mid x \neq \frac{1}{2}\}$ است اگر $x \neq 1/2$ باشد صورت و مخرج (۱) را بر 2x+1 تقسيم كرده داريم : y=2x-1

نمودار تابع F خط y=2x-1 بجز وقتي $x = -1/2$ است مقدار Y نظير $x = -1/2$ را با قراردادن $x = -1/2$ در معادله (۲) مي توان تعيين كرد $Y = -1/2$.



با استفاده از نمودار تابع مشاهده مي كنيم كه برد تابع ، مجموعه $\{y \mid y \neq -2\}$ است :

$$D_F = (-\infty, +\infty) - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$
$$R_F = (-\infty, +\infty) - \{2\}$$

مثال – ۱۰ : دامنه تعريف تابع $g = \left\{(x, y) \perp y = \dfrac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - x - 6}\right\}$ را يافته و آن را رسم كنيد .

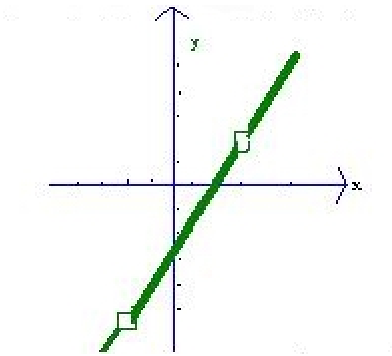
حل :

$$y := \frac{(x+2)(x-3)(x-2)}{(x+2)(x-3)}$$
$$D_f = R - \{-2, 3\}$$

درصورتي كه دامنه تابه را بصورت مقابل درنظر بگيريم داريم

$$y = x - 2$$

نمودار تابع g خط $y = x - 2$ بجز وقتي كه $x \neq \{-2, 3\}$ و مقادير y نظير $x = -2$ و $x = 3$ را با قرار دادن اين مقادير در معادله $y = x - 2$ بدست مي آوريم $y = 1, y = -4$. نمودار تابع در ذيل آورده شده است .



با استفاده از نمودار تابع ملاحظه مي شود که برد تابع بصورت زير است :

$D_g = R - \{-2,3\}$

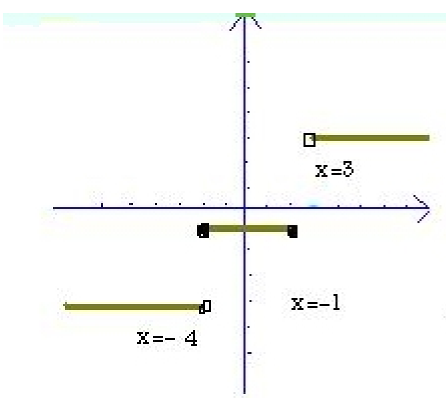
$R_g = R - \{1,-4\}$

در مثال زير توابع داده شده را بصورت مجموعه زوجهاي مرتبي از (x,y) درنظر بگيريم که در معادلات داده شده صدق کنند و سپس دامنه و برد تابع را تعيين کرده و نمودار آنرا رسم مي کنيم .

مثال – ۱۱ : دامنه تعريف تابع زير را يافته آن را رسم کنيد .

$$h = \begin{cases} -4 & x < 4 \\ -1 & -2 \le x \le 2 \\ 3 & 2 < x \end{cases}$$

حل:تابع Hاز سه تابع جداگانه تشکيل شده است نمودار تابع در زير آورده شده است . هر قسمت را جداگانه رسم ميکنيم .



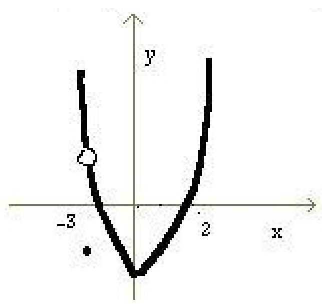
$D_h = R$

$R_h = R - \{-4,1,3\}$

مثال – ۱۲ : دامنه تعريف تابع زير را يافته و انرا رسم كنيد :

$$y=\begin{cases} x^2-4 & , \ x\neq -3 \\ -2 & , \ x=-3 \end{cases}$$

حل : دامنه تابع h مجموعه $(-\infty,+\infty)$ است . اگر $x=-3$ را در $y=x^2-4$ قرار دهيم $y=5$ خواهد شد . يعني نمودار از نقطه $(-3,-2)$ و تمام نقاط $y=x^2-4$ بجز نقطه $(-3,5)$ تشكيل مي شود . برد اين تابع $[-4,\infty)$ است .



مثال – ۱۳ : دامنه تعريف تابع زير را بيابيد و انرا رسم كنيد :

$$y=\begin{cases} x+5 & , \quad x<-5 \\ \sqrt{25-x^2} & , \quad -5\leq x\leq 5 \\ x-5 & , \quad 5<x \end{cases}$$

حل: دامنه تابع مجموعه $(-\infty,+\infty)$ تابع f از اجتماع سه تابع تشكيل شده كه ما جداگانه هر كدام را بررسي ميكنيم

(۱) اگر $x<-5$, $f_1=y=x+5$

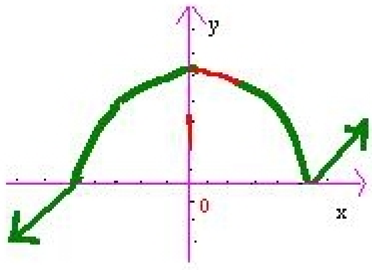
نمودار تابع (۱) قمستي از خط $y=x+5$ است كه نقطه سمت چپ آن $(-5,0)$ مي باشد .

(۲) $-5\leq x\leq 5$, $f_2=y=\sqrt{25-x^2}$

طرفيم معادله (۲) را به توان ۲ مي رسانيم $x^2+y^2=25$ كه اين معادله دايره اي به مركز مبدا مختصات و شعاع ۵ است و مقادير $0\leq y$ زيرا علامت راديكال در معادله (۲) دليل بر غير منفي بودن است بنابراين نمودار f_2 نيمدايره اي است كه در زير محور x ها قرار ندارد .

(۳) $f_3=y=x-5$, $x>5$

نمودار f_3 قسمتي از خط $y=x-5$ كه در طرف راست نقطه $(5,0)$ قرار دارد و نمودار f از اجتماع نمودار توابع f_1, f_2, f_3 نتيجه مي شود و با استفاده از نمودار ، برد تابع فاصله $(-\infty,+\infty)$ است .



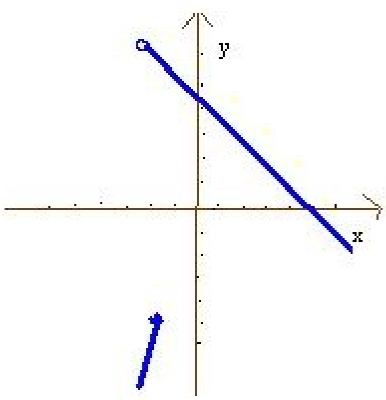
مثال – ۱۴ : نمودار تابع زیر را رسم کنید :

$$g = y = \begin{cases} 6x+5 & ,x \le -2 \\ 4-x & ,-2 < x \end{cases}$$

حل : دامنه تابع g مجموعه $(-\infty,+\infty)$ است تابع g از اجتماع دو تابع زیر تشکیل شده است

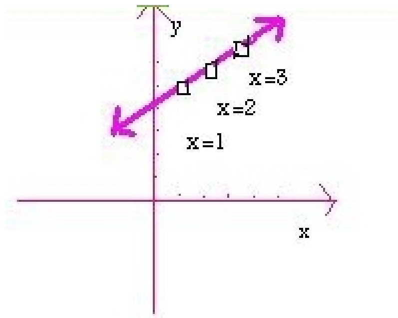
$$g_1 = 6x+5 \quad ,x \le -2$$
$$g_2 = 4-x \quad ,-2 < x$$

و نمودار تابع g از اجتماع نمودار توابع g_1, g_2 نتیجه مي شود و با استفاده از نمودار ، برد تابع $(-\infty,6)$ است .



مثال – ۱۵ : دامنه تعریف تابع $G = \dfrac{(x^2+3x-4)(x^2-5x+6)}{(x^2-3x+2)(x-3)}$ رابیابید .

حل : دامنه تابع به ازاي مقادیر $x=1, x=2, x=3$ صفر مي شود ، بنابراین دامنه تابع مجموعه $\{x \mid x \ne 1,2,3\}$ است . اگر x عدد دلخواهي متعلق به دامنه تابع باشد صورت و مخرج کسر را ساده کرده و داریم $\{x \ne 1,2,3\}$ نقطه $(3,7),(2,6)(1,5)$ از این خط است و با استفاده از نمودار برد آن مجموعه $\{y \mid y \ne 5,6,7\}$ است .



مثال – ١٦ : $y=|x||x-1|$

حل : بخاطر داريد $|a|=a$ است اگر $a\geq 0$ بنابراين y به ازاي هر مقدار حقيقي x حقيقي مي شود و به دامنه تابع يعني $(-\infty,+\infty)$ متعلق است .

مي دانيم اگر $x\geq 1$

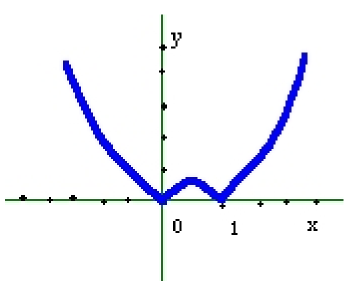
$$\left.\begin{array}{l}|x|=x\\|x-1|=x-1\end{array}\right\}\Rightarrow |x||x-1|=x^2-x$$

و اگر $0\leq x\leq 1$

$$\left.\begin{array}{l}|x|=x\\|x-1|=1-x\end{array}\right\}\Rightarrow |x||x-1|=-x^2+x$$

و اگر $x<0$

$$\left.\begin{array}{l}|x|=-x\\|x-1|=1-x\end{array}\right\}\Rightarrow |x||x-1|=x^2-x$$

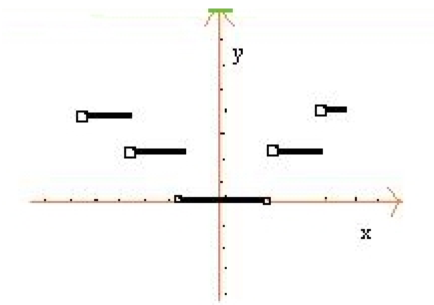


مثال – ١٧ : دامنه و برد تابع زير را تعيين كرده و نمودار انرا رسم كنيد .

$$y=\left[x^2\right]$$

حل دامنه تابع $(-\infty,+\infty)$ است.

$$-\sqrt{3} \le x < -\sqrt{2} \quad \to 2 \le x^2 < 3 \to \left[x^2\right] = 2$$
$$-\sqrt{2} \le x < -1 \quad \to 1 \le x^2 < 2 \to \left[x^2\right] = 1$$
$$-1 \le x < 0 \quad \to 0 \le x^2 < 1 \to \left[x^2\right] = 0$$
$$0 \le x < 1 \quad \to 0 \le x^2 < 1 \to \left[x^2\right] = 0$$
$$1 \le x < \sqrt{2} \quad \to 1 \le x^2 < 2 \to \left[x^2\right] = 1$$
$$\sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \quad \to 2 \le x^2 < 3 \to \left[x^2\right] = 2$$



تمرین :

1. $y = x^2 + 2$
2. $y = \sqrt{4 - x^2}$
3. $y = |x - 3|$
4. $y = |x + 3|$
5. $y = \dfrac{x^{-2} - 3x + 2}{x - 1}$
6. $y = \begin{cases} 3x - 4 & x \geq 1 \\ 2 & x < 1 \end{cases}$
7. $y = \sqrt{6x^2 - 5x - 4}$
8. $y = |x - 4|$
9. $y = |x||x + 1|$
10. $y = |x||x - 1||x + 2|$
11. $y = \dfrac{[x]}{|x|}$
12. $y = x - [x]$
13. $y = (x - [x])^2$
14. $y = 2x^2 - 2[|x|]^2$